Содержание

От авторов **5**

Глава I. Решения к тестам **6**

Решение заданий с развёрнутым ответом теста №1 6
Решение заданий с развёрнутым ответом теста № 3 14
Решение заданий с развёрнутым ответом теста № 5 21
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №7 29
Решение заданий с развёрнутым ответом теста № 9 38
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №11 47
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №13 54
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №15 61
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №17 67
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №19 77
Решение заданий с развёрнутым ответом теста № 21 84
Решение заданий с развёрнутым ответом теста № 23 93
Решение заданий с развёрнутым ответом теста № 25 101
Решение заданий с развёрнутым ответом теста № 27 113
Решение заданий с развёрнутым ответом теста № 29 123
Решение заданий с развёрнутым ответом теста № 31 132
Решение заданий с развёрнутым ответом теста № 33 144
Решение заданий с развёрнутым ответом теста № 35 152
Решение заданий с развёрнутым ответом теста № 37 161
Решение заданий с развёрнутым ответом теста № 39 173
Указания и краткие решения задач №16 тестов с чётными номерами 181
Указания и краткие решения задач №18 тестов с чётными номерами 197

Глава II. Решения к задачнику **211**

Решение задач из раздела «Решение уравнений (задание №12)» 211

Решение задач из раздела «Решение неравенств (задание №14)» 219
Решение задач из раздела «Задачи с экономическим содержанием (задание №15)» 229
Решение задач из раздела «Геометрические задачи (задание №16)» 244
Решение задач из раздела «Уравнения и неравенства с параметром (задание №17)» 259
Решение задач из раздела «Задачи олимпиадного типа (задание №18)» 283
Указания к задачам с чётными номерами раздела «Геометрические задачи (задание №16)» 303
Указания к задачам с чётными номерами раздела «Задачи олимпиадного типа (задание №18)» 310

От авторов

В данном пособии приведены полные решения заданий с развёрнутым ответом для всех тестов с нечётными номерами (т.е. тестов №1, №3 и т.д.), а также решения всех заданий с нечётными номерами из Задачника книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ 2022. Профильный уровень». Кроме того, в Решебнике даны указания и краткие решения к задачам №16 (планиметрия) и №18 (олимпиадная тематика) тестов с чётными номерами.

Все решения написаны достаточно подробно, в стиле беседы с читателем. Отметим, что хотя на экзамене при оформлении решений требуется меньшая степень подробности, чем выбрана авторами, Вы можете «взять на вооружение» и с успехом использовать некоторые из приёмов и стиль оформления решений, которые использованы в данной книге. Например, ключевые слова и фразы, наподобие «следовательно», «значит», «таким образом», «так как ..., то...», помогут Вам более упорядоченно излагать свои мысли. И вполне возможно, что вследствие этого Вы станете совершать меньшее количество ошибок и быстрее приходить к правильному ответу.

Данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры. А это, в свою очередь, будет способствовать не только успешной сдаче последующих экзаменов, но также окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении — вне зависимости от выбранного ВУЗа и специальности.

Желаем Вам успеха!

Авторы благодарят рецензентов за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Глава I

Решения к тестам

Десять страниц математики понятой лучше ста страниц, заученных на память, а одна страница, самостоятельно проработанная, лучше десяти страниц, понятых отчётливо, но пассивно.

Д. Юнг

Тест №1

12. а) Решите уравнение $\sin^3 x + \sin x = \sqrt{3}\cos^3 x - 2\sqrt{3}\cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-3\pi; -\frac{\pi}{3}\right)$.

Решение.

а) $\sin x(\sin^2 x + 1) = \sqrt{3}\cos x(\cos^2 x - 2)$, $\sin x(1 - \cos^2 x + 1) = \sqrt{3}\cos x(\cos^2 x - 2)$. Так как $\cos^2 x - 2 \neq 0$ при любом значении x, то сокращая обе части уравнения на $\cos^2 x - 2$, получаем равносильное уравнение: $-\sin x = \sqrt{3}\cos x$.

Заметим, что $\cos x \neq 0$ (если $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\sqrt{3}\cos x = 0$, но равенства $\cos x = \sin x = 0$ противоречат основному тригонометрическому тождеству). Поэтому разделив обе части уравнения на $\cos x$, получим равносильное уравнение: $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, корнями которого являются $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

б) Произведём отбор корней, принадлежащих промежутку $\left(-3\pi; -\frac{\pi}{3}\right)$: $-3\pi < -\frac{\pi}{3} + \pi n < -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{8\pi}{3} < \pi n < 0 \Leftrightarrow n = -1$ или $n = -2$. Таким образом, искомыми корнями являются $x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$ и $x = -\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in Z$; б) $-\frac{7\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}$.

13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина бокового ребра AA_1 равна 2. Шар с центром в точке O касается всех граней этой призмы. Точки M, N, K — середины рёбер AB, A_1B_1 и CC_1 соответственно, P — точка пересечения прямой NO с плоскостью основания ABC.

а) Докажите, что прямые PK и MO параллельны.

б) Найдите расстояние от точки O до плоскости APK.

Решение.

а) Так как расстояния от точки O до боковых граней ABB_1A_1 и ACC_1A_1 равны, то точка O лежит в плоскости α, которая делит пополам двугранный угол при ребре AA_1. Аналогично, точка O лежит в плоскости γ, которая делит пополам двугранный угол при ребре CC_1. Поэтому точка O лежит на прямой HH_1, где H и H_1 — центры правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, см. рисунок 1. А в силу равноудалённости точки O от граней ABC и $A_1B_1C_1$ она является серединой отрезка HH_1. Заметим ещё, что длины отрезков MH и NH_1 равны радиусу шара, вписанного в призму, т.е. $MH = NH_1 = 1$, откуда $CH = C_1H_1 = 2$.

рис. 1

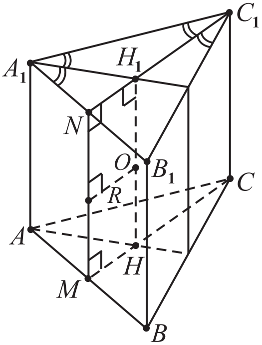
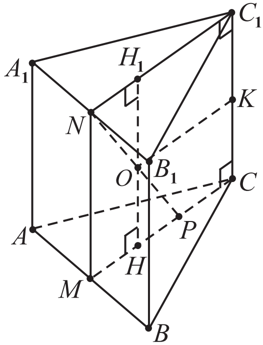


рис. 2



Точки O и K — середины сторон HH_1 и CC_1 прямоугольника HCC_1H_1, поэтому отрезок OK параллелен CM и $OK = CH = 2$. Прямоугольные треугольники HPO и H_1NO равны: $HO = H_1O, \angle HOP = \angle H_1ON$ — как вертикальные углы. Значит, $PH = NH_1 = 1$, откуда $PM = PH + MH = 2$.

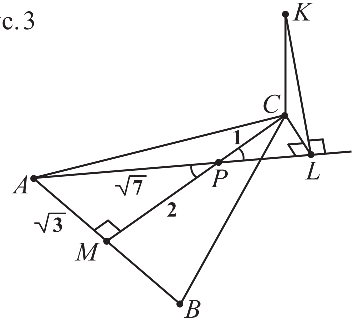
Итак, нами получено, что отрезки OK и PM параллельны и равны, откуда следует, что $MOKP$ — параллелограмм и, значит, $MO \| PK$, что и требовалось доказать.

б) Искомое расстояние от точки O до плоскости APK обозначим через d и для его нахождения применим метод вспомогательного объёма:

вычисляя объём V пирамиды сначала как объём пирамиды с вершиной O и основанием APK, а затем как объём пирамиды с вершиной A и основанием OPK, имеем: $d \cdot S_{APK} = 3V = h \cdot S_{OPK}$, где h — расстояние от точки A до плоскости OPK, S_{APK}, S_{OPK} — площади оснований APK и OPK.

Заметим, что поскольку точки O, P, K лежат в плоскости CC_1NM и эта плоскость перпендикулярна ребру AB, то расстояние от точки A до плоскости OPK равно $h = AM = \dfrac{CM}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Поскольку точка P лежит на стороне прямоугольника $OKCH$, то высота треугольника OPK равна CK, откуда $S_{OPK} = \dfrac{1}{2} OK \cdot CK = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$. Таким образом, $d \cdot S_{APK} = 3V = h \cdot S_{OPK} = \sqrt{3}$, откуда $d = \dfrac{\sqrt{3}}{S_{APK}}$.

рис. 3



Чтобы найти площадь треугольника APK, найдём длину его высоты KL. По теореме о трёх перпендикулярах $CL \perp AL$, см. рисунок 3. Прямоугольные треугольники AMP и CLP подобны и, значит, $\dfrac{CL}{AM} = \dfrac{CP}{AP}$, $CL = AM \cdot \dfrac{CP}{AP} = \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ ($AP = \sqrt{7}$ по теореме Пифагора из $\triangle AMP$). Итак, $KL^2 = CK^2 + CL^2 = 1^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 = \dfrac{10}{7}$, $KL = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{7}}$,

$$S_{APK} = \frac{1}{2} AP \cdot KL = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{S_{APK}} = \sqrt{3} : \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$

14. Решите неравенство

$$\log_{0,2}(21-21x) \leqslant \log_{0,2}(x^2-3x+2)+\log_{0,2}(x+8).$$

Решение.

Запишем данное в условии неравенство в виде:

$$\log_{0,2}\big(21(1-x)\big) \leqslant \log_{0,2}\big((1-x)(2-x)\big)+\log_{0,2}(x+8).$$

Областью определения неравенства являются такие значения x, для которых выполнено $-8<x<1$. Преобразуем полученное неравенство:

$$\log_{0,2}21+\log_{0,2}(1-x) \leqslant \log_{0,2}(1-x)+\log_{0,2}(2-x)+\log_{0,2}(x+8),$$

$\log_{0,2}21 \leqslant \log_{0,2}(2-x)+\log_{0,2}(x+8)$, $\log_{0,2}21 \leqslant \log_{0,2}\big((2-x)(x+8)\big)$. На своей области определения неравенство принимает вид: $21 \geqslant (2-x)(x+8)$, $21 \geqslant -x^2-6x+16$, $x^2+6x+5 \geqslant 0$, откуда $x \leqslant -5$ и $x \geqslant -1$. Учитывая, что $-8<x<1$, получаем: $(-8;-5]\cup[-1;1)$.

Ответ: $(-8;-5]\cup[-1;1)$

15. В июле 2021 года был взят кредит на пять лет в размере 550 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле 2022, 2023, 2024 годов долг остаётся равным 550 тыс. рублей;
— выплаты в 2025 и 2026 годах равны;
— к июлю 2026 года долг будет выплачен полностью.

Найдите r, если известно, что после того, как долг будет выплачен полностью, общий размер выплат составит 1050 тыс. рублей.

Решение.

Введём обозначение $k=\dfrac{r}{100}$, тогда в январе 2022, 2023 и 2024 годов после начисления $r\%$ долг составляет $550(k+1)$ тыс. руб., поэтому выплаты за эти три года равны $3\cdot\big(550(k+1)-550\big)=1650k$ тыс. руб.

Пусть x тыс. руб. — выплаты в 2025 и 2026 годах. Тогда в июле 2025 года долг перед банком составляет $550(k+1)-x$, а после начисления процентов в январе 2026 года долг составляет $\big(550(k+1)-x\big)\cdot(1+k)$. Так как после выплаты x тыс. руб. в 2026 году долг становится равным нулю, то $\big(550(k+1)-x\big)\cdot(1+k)=x$. Выразим из этого равенства x через k: $550(k+1)^2 = (2+k)x$, $x = \dfrac{550(k+1)^2}{2+k}$.

Выплаты банку за все 5 лет равны $1650k + 2x = 1650k + \dfrac{1100(k+1)^2}{2+k}$, что по условию составляет 1050 тыс.руб. Таким образом, имеем уравнение: $1650k + \dfrac{1100(k+1)^2}{2+k} = 1050$, $33k + \dfrac{22(k+1)^2}{2+k} = 21$,
$66k + 33k^2 + 22k^2 + 44k + 22 = (2+k)\cdot 21$, $55k^2 + 89k - 20 = 0$, откуда $k = \dfrac{1}{5}$, $r = 100\cdot k = 20$ (второй корень $k = -\dfrac{20}{11}$ не удовлетворяет смыслу задачи).

Ответ: $r = 20$

16. Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C. Продолжение биссектрисы CK этого треугольника пересекает его описанную окружность в точке L. Прямая, проходящая через точку L и середину гипотенузы AB, пересекает вторично описанную окружность треугольника ABC в точке M и пересекает катет BC в точке P.

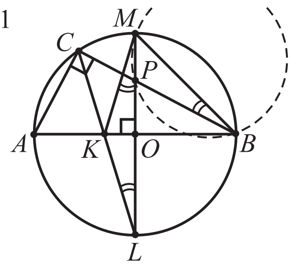
а) Докажите, что прямая MK является касательной к описанной окружности треугольника BMP.

б) Найдите площадь треугольника MKP, если $AC = 3$, $BC = 4$.

Решение.

а) Поскольку CL — биссектриса угла ACB, то хорды AL и BL стягивают равные дуги и, значит, $AL = BL$. Пусть O — середина гипотенузы AB, тогда O — центр описанной окружности $\triangle ABC$, а поскольку $AL = BL$, то диаметр LM перпендикулярен диаметру AB, см. рисунок 1.

рис. 1



Прямоугольные треугольники MOK и LOK равны по двум катетам ($MO = LO$, OK — общий катет), поэтому $\angle KML = \angle MLK$. Заметим, что поскольку углы MLC и MBC опираются на одну и ту же дугу, то они равны и, значит, $\angle KML = \angle MLC = \angle MBC$. Осталось лишь заметить, что из равенства $\angle KMP = \angle MBP$ следует, что прямая KM совпадает с касательной к описанной окружности $\triangle BMP$. В самом деле, по известному свойству угол между хордой MP и касательной в точке M равен половине дуги, стягиваемой хордой MP и, значит, равен $\angle MBP$. Поэтому из равенства $\angle KMP = \angle MBP$ следует, что прямая KM образует с хордой MP тот же угол, что и касательная в точке M, т.е. KM совпадает с касательной, что и требовалось доказать.

б) Так как $KO \perp ML$, то для искомой площади $\triangle MKP$ имеем:

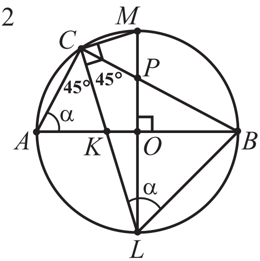
$$S_{MKP} = \frac{1}{2} KO \cdot MP.$$

Найдём KO: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$, $\dfrac{AK}{BK} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{4}$ (по свойству биссектрисы) $\Rightarrow$ $AK = \dfrac{3}{7} AB = \dfrac{15}{7}$, $KO = AO - AK = \dfrac{5}{2} - \dfrac{15}{7} = \dfrac{5}{14}$.

Теперь найдём MP. Так как ML — диаметр, то $\angle MCL = 90^\circ$, а поскольку $\angle BCL = 45^\circ$, то $\angle MCP = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, см. рисунок 2. Значит, CP — биссектриса треугольника MCL, и поэтому

$$\frac{MP}{LP} = \frac{CM}{CL} = \operatorname{tg} \angle MLC.$$

рис. 2



Заметим, что поскольку AB и ML — перпендикулярные диаметры, то дуга BM равна 90°, отсюда $\angle BLM = \dfrac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$, $\angle MLC = \angle BLC - \angle BLM = \alpha - 45^\circ$. Завершим вычисления, воспользовавшись формулой тангенса разности: $\dfrac{MP}{LP} = \operatorname{tg} \angle MLC = \operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} = \dfrac{4/3 - 1}{1 + 4/3} = \dfrac{1/3}{7/3} = \dfrac{1}{7}$; $\dfrac{MP}{LP} = \dfrac{1}{7}$; $MP = \dfrac{1}{8} \cdot ML = \dfrac{5}{8}$. Итак,

$$S_{MKP} = \frac{1}{2} KO \cdot MP = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{224}.$$

Ответ: $\dfrac{25}{224}$

17. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{x^2-2x+a}{21x^2-10ax+a^2}=0$ имеет ровно два различных корня.

Решение.

Данное в условии уравнение равносильно системе:

$$(*)\quad \begin{cases} x^2-2x+a=0 \\ 21x^2-10ax+a^2\neq 0. \end{cases}$$

Уравнение $x^2-2x+a=0$ имеет два различных корня $\Leftrightarrow$ дискриминант $D=4-4a$ положителен $\Leftrightarrow$ $a<1$.

Так как $21x^2-10ax+a^2=(3x-a)(7x-a)$, то при любых значениях a корнями уравнения $21x^2-10ax+a^2=0$ являются $x=\dfrac{a}{3}$ и $x=\dfrac{a}{7}$.

Система $(*)$ имеет ровно два различных решения $\Leftrightarrow$ уравнение $x^2-2x+a=0$ имеет два различных корня и эти корни не совпадают с $x=\dfrac{a}{3}$ и $x=\dfrac{a}{7}$. Поэтому для получения ответа в задаче нужно из промежутка $(-\infty;1)$ исключить те значения a, для которых $x=\dfrac{a}{3}$ или $x=\dfrac{a}{7}$ является корнем уравнения $x^2-2x+a=0$.

Подставим поочерёдно $x=\dfrac{a}{3}$ и $x=\dfrac{a}{7}$ в уравнение $x^2-2x+a=0$:

$\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{2a}{3}+a=0,\ a^2+3a=0,\ a(a+3)=0,\ a=0$ или $a=-3$;

$\dfrac{a^2}{49}-\dfrac{2a}{7}+a=0,\ a^2+35a=0,\ a(a+35)=0,\ a=0$ или $a=-35$.

Исключая из промежутка $(-\infty;1)$ значения $a=0$, $a=-3$ и $a=-35$, получаем ответ.

Ответ: $a\in(-\infty;-35)\cup(-35;-3)\cup(-3;0)\cup(0;1)$

18. На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 6, а среднее арифметическое шести наибольших из них равно 16.

а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 4?

б) Может ли среднее арифметическое всех 11 написанных на доске чисел равняться 12?

в) Пусть N – шестое по величине число, а S – среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S-N$.

Решение.

Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_{11}$ – одиннадцать натуральных чисел, написанных на доске. Тогда из условия задачи имеем: $\dfrac{x_1 + \ldots + x_6}{6} = 6$, $\dfrac{x_6 + \ldots + x_{11}}{6} = 16$, или $x_1 + \ldots + x_6 = 36$, $x_6 + \ldots + x_{11} = 96$.

а) Если бы наименьшее из чисел x_1 равнялось бы 4, то $x_2 \geqslant 5$, $x_3 \geqslant 6$, $x_4 \geqslant 7$, $x_5 \geqslant 8$, $x_6 \geqslant 9$, и, значит, $x_1 + \ldots + x_6 \geqslant 4+5+6+7+8+9 = 39$. Но это противоречит равенству $x_1 + \ldots + x_6 = 36$, поэтому $x_1 \neq 4$, т.е. ответ в пункте а) – нет.

б) Если бы среднее арифметическое всех 11 чисел равнялось 12, то $x_1 + \ldots + x_{11} = 11 \cdot 12 = 132$. Но сложив равенства $x_1 + \ldots + x_6 = 36$ и $x_6 + \ldots + x_{11} = 96$, мы получаем, что $(x_1 + \ldots + x_{11}) + x_6 = 132$, и подставляя в это равенство $x_1 + \ldots + x_{11} = 132$, приходим к тому, что $x_6 = 0$ – противоречие с тем, что x_6 – натуральное число. Поэтому ответ в пункте б) – нет.

в) Если S – среднее арифметическое всех 11 чисел, а $x_6 = N$, то выполняя подстановки $x_1 + \ldots + x_{11} = 11S$ и $x_6 = N$ в равенство $(x_1 + \ldots + x_{11}) + x_6 = 132$, имеем: $11S + N = 132 \Rightarrow S - N = 12S - 132$. Отсюда видим, что $S - N$ тем больше, чем больше S.

Заметим, что $N = x_6 \geqslant 9$. В самом деле, если $x_6 \leqslant 8$, то

$$x_1 + \ldots + x_6 \leqslant 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 33,$$

а это противоречит равенству $x_1 + \ldots + x_6 = 36$.

Так как $N \geqslant 9$, то $11S = 132 - N \leqslant 123$, $S \leqslant \dfrac{123}{11}$, $S - N \leqslant \dfrac{123}{11} - 9 = \dfrac{24}{11}$. Остаётся лишь заметить, что поскольку при $N = 9$ все знаки неравенств обращаются в равенство, то для доказательства достижимости равенства $S - N = \dfrac{24}{11}$ достаточно привести пример таких натуральных чисел $x_1 < \ldots < x_5 < 9 < x_7 < \ldots < x_{11}$, что $x_1 + \ldots + x_5 + 9 = 36$, $9 + x_7 + \ldots + x_{11} = 96$. Подходят, например, $x_5 = 8$, $x_4 = 7$, $x_3 = 6$, $x_2 = 5$, $x_1 = 1$, и $x_7 = 10$, $x_8 = 11$, $x_9 = 12$, $x_{10} = 13$, $x_{11} = 41$.

Так как $S - N \leqslant \dfrac{24}{11}$ и для указанного выше набора чисел $x_1, \ldots, x_{11}$ выполняется равенство $S - N = \dfrac{24}{11}$, то наибольшее возможное значение $S - N$ равно $\dfrac{24}{11}$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) $\dfrac{24}{11}$.