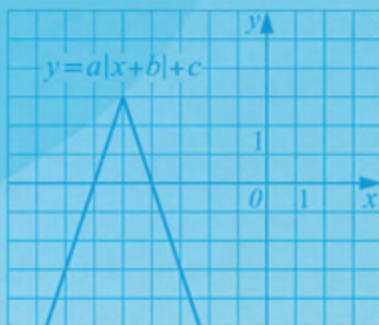




Д.А. Мальцев
А.А. Мальцев
Л.И. Мальцева

МАТЕМАТИКА
ПОДГОТОВКА К ЕГЭ 2023
Профильный уровень
РЕШЕБНИК

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



НАРОДНОЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

*Д.А. Мальцев,
А.А. Мальцев,
Л.И. Мальцева*

МАТЕМАТИКА
Подготовка к ЕГЭ 2023
Профильный уровень
Решебник

Издатель Мальцев Д.А.
Ростов-на-Дону
Народное образование
Москва
2023

ББК 22.1
М 21

Рецензенты: *К. Э. Каибханов*, к. ф.-м. н., доцент ЮФУ;
Е. А. Шатилова, учитель высшей категории

Авторы: *Д. А. Мальцев, А. А. Мальцев, Л. И. Мальцева*

М 21 **Математика. Подготовка к ЕГЭ 2023. Профильный уровень. Решебник** / Д.А. Мальцев, А.А. Мальцев, Л.И. Мальцева — Ростов н/Д: Издатель Мальцев Д.А.; М.: Народное образование, 2023. — 352 с.
ISBN 978-5-87953-643-0

В пособии приведены полные решения заданий с развёрнутым ответом всех тестов с нечётными номерами (т.е. тестов №1, №3 и т.д.), а также решения всех заданий с нечётными номерами из Задачника книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ 2023. Профильный уровень».

Кроме того, в этом Решебнике даны указания и краткие решения планиметрических задач (задание №16) и задач олимпиадного характера (задание №18) из тестов с чётными номерами и задач с чётными номерами из Задачника вышеуказанной книги.

Все решения написаны достаточно подробно, в стиле беседы с читателем.

Данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры. А это, в свою очередь, будет способствовать не только успешной сдаче последующих экзаменов, но также окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении — вне зависимости от выбранного ВУЗа и специальности.

ISBN 978-5-87953-643-0

ББК 22.1

© ИП Мальцев Д.А., 2022

Содержание

От авторов	5
Глава I. Решения к тестам	6
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №1	6
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №3	14
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №5	22
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №7	30
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №9	37
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №11	45
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №13	54
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №15	63
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №17	70
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №19	77
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №21	83
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №23	93
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №25	101
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №27	110
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №29	118
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №31	130
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №33	140
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №35	149
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №37	161
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №39	169
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №41	178
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №43	190
Решение заданий с развёрнутым ответом теста №45	198
Указания и краткие решения задач №16 тестов с чётными номерами	211
Указания и краткие решения задач №18 тестов с чётными номерами	230

Глава II. Решения к задачнику	246
Решение задач из раздела «Решение уравнений (задание №12)»	246
Решение задач из раздела «Решение неравенств (задание №14)»	254
Решение задач из раздела «Задачи с экономическим содержанием (задание №15)»	263
Решение задач из раздела «Геометрические задачи (задание №16)»	275
Решение задач из раздела «Уравнения и неравенства с параметром (задание №17)»	290
Решение задач из раздела «Задачи олимпиадного типа (задание №18)»	314
Указания к задачам с чётными номерами раздела «Геометрические задачи (задание №16)»	333
Указания к задачам с чётными номерами раздела «Задачи олимпиадного типа (задание №18)»	340

От авторов

В данном пособии приведены полные решения заданий с развёрнутым ответом для всех тестов с нечётными номерами (т.е. тестов №1, №3 и т.д.), а также решения всех заданий с нечётными номерами из Задачника книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ 2023. Профильный уровень». Кроме того, в Решебнике даны указания и краткие решения к задачам №16 (планиметрия) и №18 (олимпиадная тематика) тестов с чётными номерами.

Все решения написаны достаточно подробно, в стиле беседы с читателем. Отметим, что хотя на экзамене при оформлении решений требуется меньшая степень подробности, чем выбрана авторами, Вы можете «взять на вооружение» и с успехом использовать некоторые из приёмов и стиль оформления решений, которые использованы в данной книге. Например, ключевые слова и фразы, наподобие «следовательно», «значит», «таким образом», «так как ..., то...», помогут Вам более упорядоченно излагать свои мысли. И вполне возможно, что вследствие этого Вы станете совершать меньшее количество ошибок и быстрее приходить к правильному ответу.

Данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры. А это, в свою очередь, будет способствовать не только успешной сдаче последующих экзаменов, но также окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении — вне зависимости от выбранного ВУЗа и специальности.

Желаем Вам успеха!

Авторы благодарят рецензентов за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Глава I

Решения к тестам

Десять страниц математики понятой лучше ста страниц, заученных на память, а одна страница, самостоятельно проработанная, лучше десяти страниц, понятых отчётливо, но пассивно.

Д. Юнг

Тест №1

12. а) Решите уравнение $2 \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(-x) + \cos x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

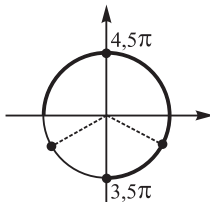
Решение.

а) По формуле приведения $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$, поэтому исходное уравнение преобразуется к виду:

$$-2 \cos x \cdot \sin x = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Решением уравнения $\cos x = 0$ являются $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Решением уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ являются $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

б) Отметим на тригонометрической окружности дугу $[3,5\pi; 5\pi]$ и точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, см. рисунок.



Из отмеченных точек в отрезок $[3,5\pi; 5\pi]$ попадают точки $x = 3,5\pi$, $x = 4\pi - \frac{\pi}{6}$, $x = 4,5\pi$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{23\pi}{6}$, $\frac{9\pi}{2}$.

13. Основанием правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC . На прямой AA_1 отмечена точка D так, что точка A_1 – середина отрезка AD . На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что C_1 – середина отрезка B_1E .

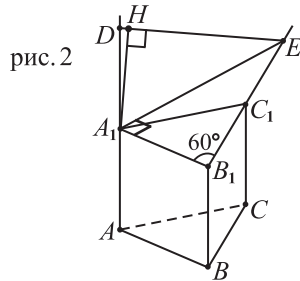
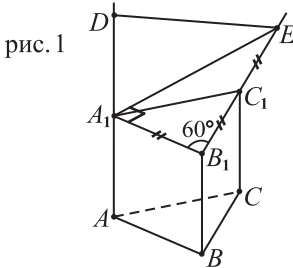
а) Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и DE , если $AB = 7$, $AA_1 = 9$.

Решение.

а) Так как $A_1B_1 = B_1C_1$ и C_1 – середина B_1E , то $B_1E = 2A_1B_1$. Поскольку $\angle A_1B_1E = 60^\circ$, то из равенства $B_1E = 2A_1B_1$ следует, что $\frac{A_1B_1}{B_1E} = \frac{1}{2} = \cos \angle A_1B_1E$ и, значит, $\triangle A_1B_1E$ – прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине A_1 , см. рисунок 1.

Отрезок A_1E – проекция отрезка DE на плоскость $A_1B_1C_1$, и поскольку $A_1B_1 \perp A_1E$, то по теореме о трёх перпендикулярах $A_1B_1 \perp DE$, что и требовалось доказать.



б) Покажем, что $A_1B_1 \perp A_1DE$ (прямая A_1B_1 перпендикулярна плоскости A_1DE). В самом деле, $A_1B_1 \perp A_1D$ – по условию, $A_1B_1 \perp A_1E$ – доказано в пункте а), отсюда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $A_1B_1 \perp A_1DE$.

Так как $AB \parallel A_1B_1$, то $AB \perp ADE$. Поэтому расстояние между прямыми AB и DE равно длине перпендикуляра из точки A к прямой DE . А поскольку $AD = 2A_1D$, то эта искомая длина перпендикуляра равна $2A_1H$, где A_1H – перпендикуляр к DE , см. рисунок 2.

Длину отрезка A_1H найдём, выразив двумя способами площадь прямоугольного $\triangle A_1DE$: $2S_{A_1DE} = A_1D \cdot A_1E = A_1H \cdot DE \Rightarrow A_1H = \frac{A_1D \cdot A_1E}{DE}$. Проведём вычисления: $A_1E = A_1B_1 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 7\sqrt{3}$, $DE^2 = A_1E^2 + A_1D^2 = (7\sqrt{3})^2 + 9^2 = 228$, $DE = \sqrt{228} = 2\sqrt{57}$. Итак, $A_1H = \frac{9 \cdot 7\sqrt{3}}{2\sqrt{57}}$, а искомая величина равна $2A_1H = \frac{63}{\sqrt{19}}$.

Ответ: б) $\frac{63}{\sqrt{19}}$

14. Решите неравенство $\frac{23}{3^x - 243} \geq \frac{2}{3^x - 27}$.

Решение.

Введём новую неизвестную $t = 3^x$ и преобразуем данное в условии неравенство: $\frac{23}{t - 243} - \frac{2}{t - 27} \geq 0$, $\frac{23(t - 27) - 2(t - 243)}{(t - 243)(t - 27)} \geq 0$, $\frac{21t - 135}{(t - 243)(t - 27)} \geq 0$, $\frac{7t - 45}{(t - 243)(t - 27)} \geq 0$. По методу интервалов получаем, что решением этого неравенства являются $t \in \left[\frac{45}{7}; 27 \right) \cup (243; +\infty)$. Возвращаясь к неизвестной x имеем:

$$\frac{45}{7} \leq 3^x < 27 \text{ или } 3^x > 243 \Leftrightarrow \log_3 \frac{45}{7} \leq x < 3 \text{ или } x > 5.$$

Ответ: $x \in \left[\log_3 \frac{45}{7}; 3 \right) \cup (5; +\infty)$

15. Страховая компания положила в банк некоторую сумму денег под 10% годовых для обеспечения страховых выплат. Какова была эта сумма (в рублях), если она оказалась полностью истрачена за три года на следующие выплаты: 880000 рублей в конце первого года, 605000 рублей в конце второго года и 1331000 рублей в конце третьего года (все выплаты производились после начисления банком процентов).

Решение.

Пусть X – искомая сумма, измеряемая в тысячах рублей. Тогда в конце первого года после начисления банком процентов на счёте компании было $1,1X$ тыс. руб., а после страховых выплат осталось $1,1X - 880$ тыс. руб. Далее действуя аналогично, получим, что в конце второго года после выплат осталось $1,1 \cdot (1,1X - 880) - 605$ тыс. руб., а в конце третьего года

после выплат осталось $1,1 \cdot (1,1 \cdot (1,1X - 880) - 605) - 1331$ тыс. руб., что по условию составило 0 руб. Таким образом, имеем следующее уравнение: $1,1 \cdot (1,1 \cdot (1,1X - 880) - 605) = 1331 \Rightarrow 1,1 \cdot (1,1X - 880) - 605 = \frac{1331}{1,1}$
 $\Rightarrow 1,1X - 880 = \frac{1331}{1,1^2} + \frac{605}{1,1} \Rightarrow X = \frac{1331}{1,1^3} + \frac{605}{1,1^2} + \frac{880}{1,1}$, $X = \frac{1331}{1,331} + \frac{605}{1,21} + \frac{880}{1,1} = 1000 + 500 + 800 = 2300$.

Ответ: 2300000

Примечание. Если имеется вклад на X руб., который полностью расходуется за n ежегодных выплат, равных v_1, v_2, \dots, v_n , осуществляемых после начисления банком p процентов по вкладу, то, как несложно усмотреть из выкладок приведённого выше решения, для величины X имеет место равенство: $X = \frac{v_1}{1 + 0,01p} + \frac{v_2}{(1 + 0,01p)^2} + \dots + \frac{v_n}{(1 + 0,01p)^n}$.

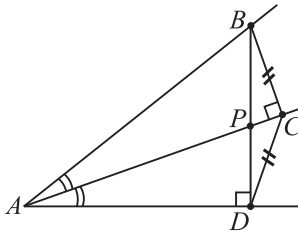
16. На стороне острого угла с вершиной A отмечена точка B . Из точки B на биссектрису и другую сторону угла опущены перпендикуляры BC и BD соответственно, P — точка пересечения прямых BD и AC .

а) Докажите, что $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BP^2}$.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника $ABCD$ к площади треугольника ABP , если $\cos \angle BAC = \frac{5}{6}$.

Решение.

а) Так как $\angle ACB = 90^\circ$ и $\angle ADB = 90^\circ$, то точки C и D лежат на окружности, построенной на отрезке AB , как на диаметре. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в эту окружность, а поскольку $\angle BAC = \angle DAC$, то равны дуги окружности, на которые опираются эти углы, и, значит, равны отрезки, стягивающие эти дуги, т.е. $CD = BC$, см. рисунок.



Поэтому равенство, которое нам требуется доказать, можно преобразовать к виду: $\frac{1}{BC^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{BP^2}$, $\frac{AB^2 - BC^2}{BC^2 \cdot AB^2} = \frac{1}{BP^2}$. По теореме Пифагора из $\triangle ABC$ имеем: $AB^2 - BC^2 = AC^2$. Отсюда следует, что наше равенство равносильно равенству: $\frac{AC^2}{BC^2 \cdot AB^2} = \frac{1}{BP^2}$, $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2}{BP^2}$. Осталось лишь заметить, что $\frac{AC^2}{AB^2} = \cos^2 \angle BAC$, $\frac{BC^2}{BP^2} = \cos^2 \angle CBP$, и $\angle BAC = \angle CAD = \angle CBP$ ($\angle CAD = \angle CBD$ – как опирающиеся на одну и ту же дугу). Итак, $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2}{BP^2}$, что доказывает требуемое равенство.

б) Пусть $AB = 1$, $\angle BAC = \alpha$. Тогда $BC = \sin \alpha$, а из прямоугольных треугольников BSP и ABD имеем: $CP = BC \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$, $AD = AB \cdot \cos 2\alpha = \cos 2\alpha$ (см. рисунок). Из $\triangle ADP$ имеем: $AP = \frac{AD}{\cos \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha}$. Для удвоенной площади треугольников ABP и ABD получаем такие выражения: $2S_{ABP} = AB \cdot AP \cdot \sin \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha$, $2S_{ABD} = AB \cdot AD \cdot \sin 2\alpha = \cos 2\alpha \cdot \sin 2\alpha$. Отсюда для отношения площадей $\triangle ABD$ и $\triangle ABP$ имеем: $\frac{S_{ABD}}{S_{ABP}} = \cos 2\alpha \cdot \sin 2\alpha : \frac{\cos 2\alpha \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos^2 \alpha$.

Далее заметим, что $\frac{S_{BCD}}{S_{ABD}} = \frac{CP}{AP}$ (если провести высоты CK и AH этих треугольников, то $\frac{CK}{AH} = \frac{CP}{AP}$ в силу подобия $\triangle CPK$ и $\triangle APH$). Значит, $\frac{S_{BCD}}{S_{ABD}} = \frac{CP}{AP} = \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha : \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$, и $\frac{S_{ABCD}}{S_{ABD}} = \frac{S_{ABD} + S_{BCD}}{S_{ABD}} = 1 + \frac{S_{BCD}}{S_{ABD}} = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha} = 1 + \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{\cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}$.

Таким образом, $\frac{S_{ABCD}}{S_{ABP}} = \frac{S_{ABCD}}{S_{ABD}} \cdot \frac{S_{ABD}}{S_{ABP}} = \frac{\cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} \cdot 2 \cos^2 \alpha = \frac{2 \cos^4 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}$. Если $\cos \alpha = \frac{5}{6}$, то для искомого отношения $\frac{S_{ABCD}}{S_{ABP}}$ имеем: $\frac{S_{ABCD}}{S_{ABP}} = 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 : \left(2 \cdot \frac{25}{36} - 1\right) = \frac{625}{18 \cdot 36} \cdot \frac{18}{7} = \frac{625}{252}$.

Ответ: б) $\frac{625}{252}$

17. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 + a^2 - 7x - 3a| = x + a \text{ имеет четыре решения.}$$

Решение .

Данное в условии уравнение равносильно системе:

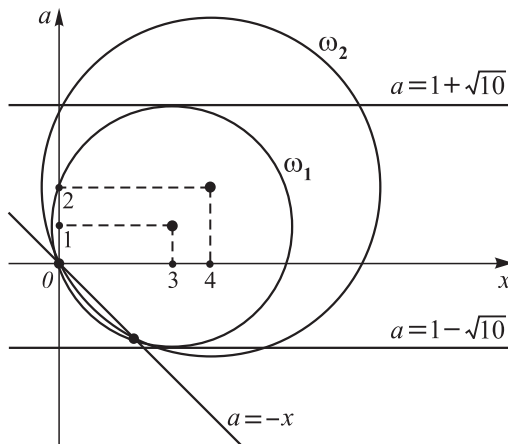
$$\left\{ \begin{array}{l} x + a \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + a^2 - 7x - 3a = -x - a \\ x^2 + a^2 - 7x - 3a = x + a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \geq -x \\ \left[\begin{array}{l} (x-3)^2 + (a-1)^2 = 10 \\ (x-4)^2 + (a-2)^2 = 20. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Первое уравнение совокупности, входящей в эту систему, задаёт в координатной плоскости $(x; a)$ окружность ω_1 с центром в точке $O_1(3; 1)$ радиуса $\sqrt{10}$; второе уравнение этой совокупности задаёт окружность ω_2 с центром в точке $O_2(4; 2)$ радиуса $2\sqrt{5}$; условие $a \geq -x$ задаёт множество точек $(x; a)$, расположенных не ниже прямой $a = -x$. Прямую $a = -x$ обозначим через l .

Заметим, что прямая l ($x + a = 0$) имеет с каждой из окружностей ω_1 и ω_2 пару общих точек, координаты которых являются решением системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + a = 0 \\ x^2 + a^2 - 7x - 3a = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -x \\ 2x^2 - 4x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 0, a = 0 \text{ и } x = 2, a = -2.$$

Поэтому окружности ω_1, ω_2 и прямая l расположены друг относительно друга именно так, как показано на рисунке ниже.



Чтобы при некотором фиксированном $a = a_0$ данное в условии уравнение имело четыре решения, необходимо и достаточно, чтобы прямая $a = a_0$ пересекала каждую из окружностей ω_1 и ω_2 в двух точках, расположенных не ниже прямой l . Проводя прямые $a = 1 - \sqrt{10}$ и $a = 1 + \sqrt{10}$, которые являются касательными к окружности ω_1 , видим, что прямая $a = a_0$ пересекает окружность ω_1 в двух точках, лежащих выше прямой l в том случае, если $1 - \sqrt{10} < a_0 < -2$ и $0 < a_0 < 1 + \sqrt{10}$. А поскольку каждая из этих прямых пересекает также в двух точках окружность ω_2 , то эти значения a являются искомыми.

Ответ: $a \in (1 - \sqrt{10}; -2) \cup (0; 1 + \sqrt{10})$

18. Имеется три коробки, в первой из которых лежит 55 камней, во второй — 65 камней, а третья — пустая. За один ход разрешается взять по одному камню из любых двух непустых коробок и положить в оставшуюся коробку.

а) Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы число камней в первой коробке было равно 55, во второй — 5, а в третьей — 60?

б) Можно ли добиться того, чтобы все 120 камней лежали в третьей коробке?

в) После нескольких ходов в первой коробке оказалось три камня. Какое наибольшее число камней могло при этом оказаться в третьей коробке?

Решение .

а) Заметим, что если дважды переложить по камню из первой и второй коробок в третью, а затем один раз переложить по камню из 2-ой и 3-ей коробок в 1-ую, то число камней в 1-ой коробке не изменится ($-1 - 1 + 2 = 0$), во 2-ой коробке станет на 3 камня меньше ($-1 - 1 - 1 = -3$), а в 3-ей коробке станет на 3 камня больше ($2 + 2 - 1 = 3$). Если такую последовательность из трёх ходов повторить ещё 19 раз, т.е. всего сделать 20 таких операций из трёх ходов каждая, то в 1-ой коробке останется 55 камней, число камней во 2-ой коробке станет равно $65 - 20 \cdot 3 = 5$, а в 3-ей коробке будет $0 + 20 \cdot 3 = 60$ камней. Поэтому ответ в пункте а) положительный.

Обратим внимание (это понадобится нам в пункте в), что если в каждой из коробок не меньше трёх камней, то можно провести аналогичную операцию из трёх ходов, после которой число камней в любой выбранной коробке останется прежним, в другой выбранной коробке — уменьшится на 3, а в оставшейся коробке увеличится на 3. Например, чтобы оставить

неизменным число камней во 2-ой коробке, уменьшить на 3 число камней в 1-ой коробке и увеличить на 3 число камней в 3-ей коробке, нужно дважды переложить по камню из первой и второй коробок в третью, а затем один раз переложить по камню из 1-ой и 3-ей коробок во 2-ую.

б) Заметим, что первоначально остаток от деления на 3 числа камней в коробке различен для всех трёх коробок: $55 \equiv 1 \pmod{3}$, $65 \equiv 2 \pmod{3}$, $0 \equiv 0 \pmod{3}$. (Общепринятая сокращённая запись $a \equiv b \pmod{k}$ означает, что целые числа a и b имеют одинаковый остаток при делении на натуральное число k .) А поскольку при любом ходе разность между числом камней в любых двух коробках либо не изменяется, либо изменяется на 3 ($-1 - (-1) = 0$, $2 - (-1) = 3$, $-1 - 2 = -3$), то остатки от деления на 3 числа камней в любых двух коробках остаются всё время различными. Поэтому не может оказаться так, что в какой-то момент 1-ая и 2-ая коробки пустые (иначе остаток от деления на 3 числа камней в этих коробках был бы одинаков). Значит, добиться того, чтобы все 120 камней оказались в 3-ей коробке, невозможно.

в) Заметим, что первоначально разность между остатками от деления на 3 числа камней во второй и первой коробках равна 1, а далее эта разность остатков от деления на 3 не изменяется. Поэтому если в первой коробке оказалось 3 камня (остаток 0 при делении на 3), то минимальное число камней во второй коробке равно 1, при этом в третьей коробке будет не больше, чем $120 - 3 - 1 = 116$ камней.

Приведём пример, показывающий, что такая ситуация действительно реализуется. Первым ходом переложим по камню из 1-ой и 2-ой коробок в 3-ю, количества камней в коробках станут такими: 54, 64, 2. Затем совершим 20 раз операцию из трёх ходов, описанную в пункте а), при которой число камней в 1-ой коробке не меняется, во 2-ой коробке — уменьшается на 3, а в 3-ей коробке — увеличивается на 3. После этого количества камней в коробках будут такими: 54, 4, 62. А затем совершим 17 раз операцию из трёх ходов, при которой число камней во 2-ой коробке не меняется, в 1-ой коробке — уменьшается на 3, а в 3-ей коробке — увеличивается на 3, при этом количества камней в коробках станут такими: 3, 4, 113. И, наконец, совершим одну операцию из трёх ходов, уменьшающую на 3 число камней во 2-ой коробке и увеличивающую на 3 число камней в третьей коробке, получив требуемое число камней в коробках: 3, 1, 116.

Ответ: а) да; б) нет; в) 116.

Примечание. Заметим, что при ответе на вопрос пункта б) неявно использовался «метод инварианта». А именно, было установлено, что для любых двух коробок разность остатков от деления на 3 числа камней в этих коробках остаётся неизменной, т.е. является «инвариантом». И поскольку первоначально остатки от деления на 3 числа камней в коробках различны для всех трёх коробок, то они будут различными после любого хода.

Тест № 3

12. а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin x + \sqrt{3}$.

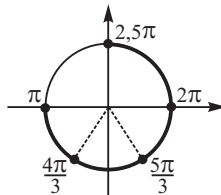
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right].$$

Решение.

а) Воспользовавшись формулой $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, преобразуем данное уравнение к виду: $(2 \sin x + \sqrt{3}) \cdot \cos x - (2 \sin x + \sqrt{3}) = 0$, $(2 \sin x + \sqrt{3}) \cdot (\cos x - 1) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю в том и только том случае, если один из них равен нулю, поэтому $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$ или $\cos x - 1 = 0$, откуда $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos x = 1$. Корнями уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ являются $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, а корнями уравнения $\cos x = 1$ являются $x = 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

б) Отметим на тригонометрической окружности дугу $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$ и точки $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n$, $x = 2\pi n$, см. данный ниже рисунок. Из отмеченных точек на дугу $[\pi; 2,5\pi]$ попадают точки $x = \frac{4\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$, $x = 2\pi$.



Ответ: а) $x = 2\pi n$, $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, 2π .